9.3 Skoro uniformna konvergencija.

Definicija 9.3. Niz merljivih realnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ na $(X, \mathcal{M}, \mu)$

- (KSU) *konvergira skoro uniformno* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall\delta > 0)(\exists E_\delta \in \mathcal{M})(\mu(E_\delta) < \delta)$$

$$(\text{ niz } (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ uniformno konvergira ka } f \text{ na } X \setminus E_\delta),$$

pri čemu uniformna konvergencija ka f na $X \setminus E_\delta$ znači da

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\delta,\varepsilon) \in \mathbf{N})(n > n_0(\delta,\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in X\setminus E_\delta} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

- Niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je *skoro uniformno Košijev* niz, ako za

$$(\forall\delta > 0)(\exists E_\delta \in \mathcal{M})(\mu(E_\delta) < \delta)$$

$$(\text{ niz } (f_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ je uniformno Košijev na } X \setminus E_\delta),$$

pri čemu uniformno Košijev na $X \setminus E_\delta$ znači da

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\delta,\varepsilon) \in \mathbf{N})(m, n > n_0(\delta,\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x\in X\setminus E_\delta} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

▲

Jasno, $(KU) \Rightarrow (KSU) \Rightarrow (KSS)$.

Napomena. Ovde se termin "skoro" ne odnosi na uniformnu konvergenciju izvan nekog skupa mere nula! Niz funkcija navedenih u Primeru 9.2 ima osobinu da uniformno konvergira na komplementu skupa $[0, \delta]$ za proizvoljno $\delta > 0$, ali ne postoji skup mere nula na čijem komplementu bi niz uniformno konvergirao.

Naredna propozicija daje ekvivalenciju pojmova skoro uniformno Košijev niz i skoro uniformno konvergentan niz.

Propozicija 9.4. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ skoro uniformno Košijev niz. Postoji merljiva funkcija f, takva da $f_n \to f$, $n \to \infty$, skoro uniformno (pa i skoro svuda).

Dokaz: Za dato $k \in \mathbf{N}$ neka je $E_k \in \mathcal{M}$ takav da je $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$ i niz $(f_n)_n$ uniformno Košijev pa i uniformno konvergentan na E_k^c. Neka je dalje $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$. Jasno, $F_k \in \mathcal{M}$ i $\mu(F_k) < 2^{-k+1}$. Primetimo da tada niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira uniformno na $F_k^c \subseteq E_k^c$.

Definišimo niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ na sledeći način:

$$g_k(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in F_k^c \\ 0, & x \in F_k \end{cases}.$$